1. Distribución de probabilidad hipergeométrica

Ahora supongamos que existe una población N, de los cuales tomamos n para realizar un ensayo. De los N se tiene r que tienen una de dos caracteristicas, y queremos conseguir la cantidad de éxitos en n, que llamaremos y, donde esto respresentaría la cantidad, de n que poseen la caracteristica de r. La variable aleatoria Y, que cuenta los y éxitos se distribuye con probabilidad hipergeométrica.

Definición: Se dice que una variable aleatoria Y tiene una distribución de probabilidad hipergeométrica si y solo si

$$p(y) = \frac{\binom{r}{y}\binom{N-r}{n-y}}{\binom{N}{n}}$$

donde $y = 0, 1, ..., n$, sujeto a $y \leq r$ y $n - y \leq N - r$.

Teorema: Si Y es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica entonces

$$\mu = \tfrac{nr}{N} \text{ y } \sigma^2 = n\left(\tfrac{r}{N}\right)\left(\tfrac{N-r}{N}\right)\left(\tfrac{N-n}{N-1}\right).$$

Ejemplo. Un jurado se integró con 6 personas elegidas de un grupo de 20 candidatos, de los cuales 8 eran afroamericanos y 12 blancos. Se supone que se seleccionó a los miembros en forma aleatoria, pero sólo uno de los elegidos es afroamericano. ¿Cree que haya alguna razón para dudar de la aleatoriedad de la selección?.

Solución.
Para este ejercicio la población total es $N = 20$, la parte de la población de intéres es la afroamericana, por lo tanto $r = 8$. La selección de intéres es quienes pertenecen al jurado, luego $n = 6$, y queremos conseguir la probabilidad de que $y = 1$.

$$p(1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{12}{5}}{\binom{20}{6}} = \frac{264}{1615} = 0{,}1634.$$

Como la probabilidad es baja, entonces si puede haber dudas acerca de la selección.

Si ahora hallamos la media y la varianza, tenemos:

$$\mu = \frac{nr}{N} = \frac{8 \times 6}{20} = 2{,}4.$$

y

$$\sigma^2 = n\left(\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 8\left(\frac{6}{20}\right)\left(\frac{14}{20}\right)\left(\frac{12}{19}\right) = \frac{504}{475} = 1{,}061.$$

Por lo tanto podemos ver que lo esperado es que de los 6, 2 o 3 sean afroamericanos, y eso debe variar por mas o menos una persona.